

О. Н. Петрищев<sup>1</sup>, д.т.н., профессор,  
К. В. Базило<sup>2</sup>, к.т.н., доцент

<sup>1</sup>Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»  
просп. Победы, 37, Киев, 03056, Украина

<sup>2</sup>Черкасский государственный технологический университет  
б-р Шевченко, 460, Черкасы, 18006, Украина

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИСКОВОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТРАНСФОРМАТОРА С КОЛЬЦЕВЫМ ЭЛЕКТРОДОМ В ПЕРВИЧНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

*Актуальность применения различных функциональных элементов пьезоэлектроники в силовых и информационных системах объясняется, прежде всего, их высокой надежностью. Одним из основных элементов таких систем является пьезокерамический трансформатор. Пьезокерамический трансформатор является альтернативой электромагнитным трансформаторам в тех сферах их применения, где необходима высокая надежность, стабильность, автономность, максимальная длительность безотказной работы. Однако в настоящее время отсутствуют надежные и достоверные методики построения математических моделей пьезоэлектрических трансформаторов, которые могли бы использоваться в качестве теоретических основ расчета характеристик и параметров этого класса функциональных элементов современной пьезоэлектроники. Основные результаты настоящей работы можно сформулировать следующим образом:*

– построена математическая модель пьезоэлектрического трансформатора с кольцевым электродом в первичной электрической цепи;

– показана высокая чувствительность частотной характеристики пьезоэлектрического трансформатора к значениям выходного сопротивления источника электрического сигнала в первичной электрической цепи.

**Ключевые слова:** пьезоэлектрический трансформатор, осесимметричные колебания, физические процессы, математическая модель.

**Введение.** Актуальность применения различных функциональных элементов пьезоэлектроники в силовых и информационных системах объясняется, прежде всего, их высокой надежностью [1] – интенсивность отказов составляет  $10^{-6}$ , т.е. сопоставима с показателями интегральных микросхем, а также малыми габаритами, что решает проблему миниатюризации таких систем.

Один из основных элементов таких систем – пьезокерамический трансформатор (ПТ) [2], который является альтернативой электромагнитным трансформаторам в тех сферах их применения, где необходима высокая надежность, стабильность, автономность, максимальная длительность безотказной работы [3]. Объектами, где необходимо применение таких сверхнадежных трансформаторов напряжения, являются: автоматические межпланетные станции; автономные глубоководные плавающие объекты; любые другие объекты, доступ к которым сильно затруднен, невозможен или

чрезвычайно опасен для человека (ядерные реакторы; химически опасные объекты, станции в Антарктиде и Арктике, подземные объекты, орбитальные спутники и т.д.).

Пьезоэлектрический трансформатор имеет ряд преимуществ по сравнению с электромагнитным, а именно [4-6]: высокую удельную мощность; отсутствие электромагнитных помех; высокую эффективность; возможность миниатюризации; широкий частотный диапазон; огнестойкость; простую технологию изготовления [7].

Чрезвычайно широкие возможности пьезотрансформаторов позволяют использовать их при создании разнообразных аналоговых и дискретных устройств преобразования сигналов.

Следует отметить, что на основе пьезотрансформаторов возможно создание разнообразных управляющих устройств, способных выполнять различные функции преобразования сигналов. Для этого в элемент пьезотранс-

форматора вводится дополнительная секция электродов и связь между секциями осуществляется только механическим путем [8].

В настоящее время пьезотрансформаторы находят все большее применение в областях, где требуется получение высоких напряжений. Практика применения пьезотрансформаторов показывает, что они достаточно эффективно работают на первой или на второй моде колебаний в области частот от нескольких десятков до сотен кГц [9].

Пьезотрансформаторы находят широкое применение в современной светотехнической аппаратуре и приборах. Они позволяют минимизировать габариты устройств зажигания и питания различного класса газоразрядных ламп, создавать высокоэффективные высокочастотные источники питания с КПД до 95 %, обеспечивающие повышение долговечности ламп в 5-10 раз и светоотдачу более чем в 1,4 раза. В настоящее время одними из наиболее динамично развивающихся электронных устройств являются тонкие дисплеи с ЖК-экранами (типа FED) [10-12].

Пьезотрансформаторы являются высокочастотными резонансными устройствами, параметры которых изменяются от изменения нагрузки. Поэтому возникает задача разработки адекватной математической модели, описывающей изменения параметров ПТ от изменения нагрузки. Для получения такой модели необходимо иметь методику определения экспериментальных характеристик ПТ. Однако использование пьезотрансформаторов сдерживается сложностью адекватного аналитического описания их моделей [13].

В настоящее время отсутствует целостная методика построения математических моделей пьезоэлектрических трансформаторов, которые могли бы использоваться в качестве теоретических основ расчета их характеристик и параметров [16], создание которой и является *целью* данной работы.

**1. Расчет коэффициента трансформации пьезоэлектрического трансформатора с кольцевым электродом в первичной электрической цепи.** Рассмотрим дисковый пьезоэлектрический трансформатор (рис. 1), первичная электрическая цепь которого состоит из генератора разности электрических потенциалов  $U_1 e^{i\omega t}$  ( $U_1$  – амплитудное значение разности электрических потенциалов;  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица;  $\omega$  – круговая час-

тота смены знака потенциала;  $t$  – время) с выходным электрическим импедансом  $Z_r$  и кольцевого электрода (позиция 1 на рис. 1). Вторичная электрическая цепь состоит из электрода в форме круга (позиция 2) с подключенной к нему электронной схемой со входным электрическим импедансом  $Z_n$ , на котором формируется разность электрических потенциалов  $U_2 e^{i\omega t}$ . Первичная и вторичная электрические цепи пьезоэлектрического трансформатора не имеют гальванической связи. Энергообмен между первичной и вторичной электрическими цепями осуществляется с помощью осесимметричных радиальных колебаний материальных частиц пьезокерамики в объеме поляризованного по толщине диска (позиция 3 на рис. 1).

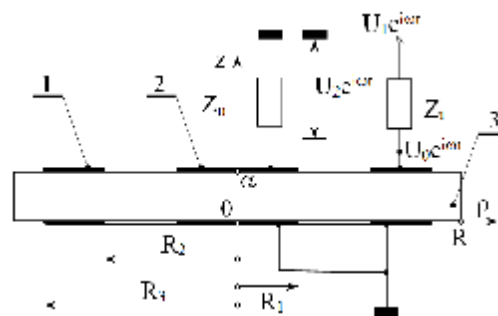


Рис. 1. Расчетная схема дискового пьезоэлектрического трансформатора

Очевидно, что работа функционального элемента пьезоэлектроники, который схематически показан на рис. 1, полностью описывается коэффициентом трансформации  $K(\omega, \Pi) = U_2/U_1$  (символом  $\Pi$  обозначен набор электрических, геометрических и физико-механических параметров трансформатора), который, следуя определению А. Н. Тихонова [14], является математической моделью рассматриваемого устройства. Схема построения математической модели пьезоэлектрического трансформатора в общих чертах изложена в работе [14].

Амплитудное значение  $U_2$  потенциала на выходе пьезоэлектрического трансформатора определяется, очевидно, как падение электрического напряжения на нагрузочном сопротивлении  $Z_n$ , т. е.

$$U_2 = I_2 Z_n, \quad (1)$$

где  $I_2$  – амплитудное значение тока во вторичной электрической цепи.

В работе [15] показано, что  $I_2 = -i\omega Q_2$ , где  $Q_2$  – амплитуда поляризационного заряда под электродом во вторичной электрической цепи трансформатора, причем

$$Q_2 = 2\pi \int_0^{R_1} \rho D_z^{(1)}(\rho) d\rho, \quad (2)$$

$$D_z^{(1)}(\rho) = e_{31}^* (\epsilon_{\rho\rho}^{(1)} + \epsilon_{\phi\phi}^{(1)}) - \chi_{33}^\sigma \frac{U_2}{\alpha} = e_{31}^* \left[ \frac{\partial u_\rho^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{u_\rho^{(1)}}{\rho} \right] - \chi_{33}^\sigma \frac{U_2}{\alpha} = \frac{e_{31}^*}{\rho} \frac{\partial u_\rho^{(1)}}{\partial \rho} [\rho u_\rho^{(1)}] - \chi_{33}^\sigma \frac{U_2}{\alpha}, \quad (3)$$

где  $e_{31}^*$  и  $\chi_{33}^\sigma$  – пьезоэлектрический модуль и компонент тензора диэлектрической проницаемости пьезокерамики для режима планарных колебаний, причем  $e_{31}^* = e_{31} - e_{33} c_{12}^E / c_{33}^E$ ,  $\chi_{33}^\sigma = \chi_{33}^E + e_{33}^2 / c_{33}^E$ ;  $e_{31}$ ,  $e_{33}$ ,  $c_{12}^E$ ,  $c_{33}^E$  и  $\chi_{33}^E$  – справочные значения пьезомодулей, модулей упругости и диэлектрической проницаемости поляризованной по толщине пьезокерамической пластинки;  $\epsilon_{\rho\rho}^{(1)}(\rho)$ ,  $\epsilon_{\phi\phi}^{(1)}(\rho)$  и  $u_\rho^{(1)}(\rho)$  – амплитудные значения изменяющихся во времени по закону  $e^{i\omega t}$  компонентом тензора малых деформаций и радиального компонента вектора смещения материальных частиц пьезокерамики в области № 1.

Подставляя определение электрической индукции  $D_z^{(1)}(\rho)$  в соотношение (2), получаем выражение для расчета амплитуды электрического заряда  $Q_2$  в следующем виде:

$$Q_2 = 2 \frac{\alpha e_{31}^*}{R_1 \chi_{33}^\sigma} C_1^\sigma u_\rho^{(1)}(R_1) - C_1^\sigma U_2, \quad (4)$$

где  $C_1^\sigma = \pi R_1^2 \chi_{33}^\sigma / \alpha$  – статическая электрическая емкость электрода во вторичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора. Подставляя выражение (4) в определение амплитуды тока  $I_2$ , а полученный результат – в соотношение (1), получаем формулу для расчета амплитудного значения разности электрических потенциалов на выходе пьезоэлектрического трансформатора

$$U_2 = -2f_e(\omega) \frac{\alpha e_{31}^*}{R_1 \chi_{33}^\sigma} u_\rho^{(1)}(R_1), \quad (5)$$

где символом  $f_e(\omega)$  обозначена функция включения электрода во вторичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора.

Числовые значения функции включения рассчитываются по формуле

$$f_e(\omega) = \frac{i\Omega^*}{1 - i\Omega^*}, \quad (6)$$

где  $\Omega^* = \omega \tau_n$  – безразмерная величина;  $\tau_n = C_1^\sigma Z_n$  – постоянная времени вторичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора. На рис. 2 показан график модуля функции включения  $f_e(\omega)$  в зависимости от значений безразмерной величины  $\Omega^*$ .

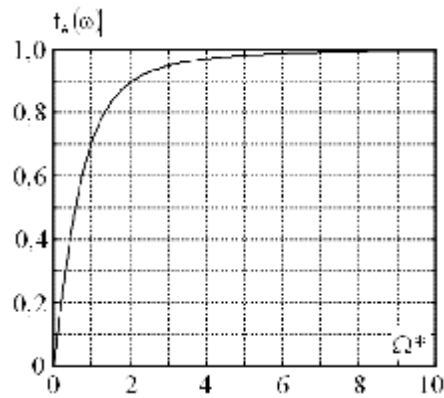


Рис. 2. Изменение модуля функции включения электрода во вторичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора

В работе [16] показано, что потенциалы  $U_2$  и  $U_0$  (амплитудное значение разности электрических потенциалов на электроде в первичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора) являются взаимосвязанными величинами. Связность потенциалов  $U_2$  и  $U_0$  обеспечивается связностью напряженно-деформированного состояния в различных областях объема колеблющегося пьезокерамического диска. Отсюда следует,

что амплитудный множитель смещения  $u_p^{(1)}(\rho)$  одновременно определяется как потенциалом  $U_2$ , так и потенциалом  $U_0$ .

Выясним, как связаны между собой потенциалы  $U_2$  и  $U_0$ .

В работе [16] определены упругие напряжения и смещения материальных частиц пьезокерамики в областях, которые находятся под электродами, и в областях, где электроды отсутствуют. Следуя изложенной в работе [16] методике, можем записать, что

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\rho) = c_{11} \frac{\partial u_p^{(1)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{12} \frac{u_p^{(1)}(\rho)}{\rho} + e_{31}^* \frac{U_2}{\alpha}, \quad (7)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2)}(\rho) = c_{11}^D \frac{\partial u_p^{(2)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{12}^D \frac{u_p^{(2)}(\rho)}{\rho}, \quad (8)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(3)}(\rho) = c_{11} \frac{\partial u_p^{(3)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{12} \frac{u_p^{(3)}(\rho)}{\rho} + e_{31}^* \frac{U_0}{\alpha}, \quad (9)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(4)}(\rho) = c_{11}^D \frac{\partial u_p^{(4)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{12}^D \frac{u_p^{(4)}(\rho)}{\rho}, \quad (10)$$

где  $c_{11} = c_{11}^E - (c_{12}^E)^2 / c_{33}^E$ ;  $c_{12} = c_{12}^E (1 - c_{12}^E / c_{33}^E)$ ;  $c_{11}^D = c_{11} + (e_{31}^*)^2 / \chi_{33}^\sigma$ ;  $c_{12}^D = c_{12} + (e_{31}^*)^2 / \chi_{33}^\sigma$  – модули упругости для режима осесимметричных радиальных колебаний материальных частиц пьезокерамического диска в областях под электродами (это область № 1, где  $\rho \in [0, R_1]$ , и область № 3, где  $\rho \in [R_2, R_3]$ ) и в областях без электродирования (это область № 2, где  $\rho \in [R_1, R_2]$ , и область № 4, где  $\rho \in [R_3, R]$ ).

Амплитудные значения радиальных компонентов векторов смещений материальных частиц в областях № 1, ..., № 4 определяются следующим образом:

$$u_p^{(1)}(\rho) = A_1 J_1(\gamma \rho), \quad (11)$$

$$u_p^{(2)}(\rho) = A_2 J_1(\gamma_1 \rho) + A_3 N_1(\gamma_1 \rho), \quad (12)$$

$$u_p^{(3)}(\rho) = A_4 J_1(\gamma \rho) + A_5 N_1(\gamma \rho), \quad (13)$$

$$u_p^{(4)}(\rho) = A_6 J_1(\gamma_1 \rho) + A_7 N_1(\gamma_1 \rho), \quad (14)$$

где  $A_1, \dots, A_7$  – частотно зависимые константы (амплитудные множители) радиальных смещений материальных частиц в различных областях;  $J_1(z)$ ,  $N_1(z)$  ( $z = \gamma \rho$ ;  $z = \gamma_1 \rho$ ) – функции Бесселя и Неймана [17] первого порядка;  $\gamma = \omega / \sqrt{c_{11} / \rho_0}$  и  $\gamma_1 = \omega / \sqrt{c_{11}^D / \rho_0}$  – волновые числа радиальных колебаний в областях под электродами и без электродного покрытия;  $\rho_0$  – плотность пьезокерамики.

На условных границах разделов областей амплитудные значения смещений и напряжений должны удовлетворять условиям динамического и кинематического сопряжения, которые записываются следующим образом:

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)}(R_1) - \sigma_{\rho\rho}^{(2)}(R_1) = 0, \quad (15)$$

$$u_p^{(1)}(R_1) - u_p^{(2)}(R_1) = 0, \quad (16)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2)}(R_2) - \sigma_{\rho\rho}^{(3)}(R_2) = 0, \quad (17)$$

$$u_p^{(2)}(R_2) - u_p^{(3)}(R_2) = 0, \quad (18)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(3)}(R_3) - \sigma_{\rho\rho}^{(4)}(R_3) = 0, \quad (19)$$

$$u_p^{(3)}(R_3) - u_p^{(4)}(R_3) = 0. \quad (20)$$

Если граница  $\rho = R$  пьезокерамического диска свободна от механических контактов с другими материальными объектами, то на контуре  $\rho = R$  должно выполняться условие

$$\sigma_{\rho\rho}^{(4)}(R) = 0. \quad (21)$$

Подставляя в условия (15) – (21) выражения (7) – (14), получаем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений, которая состоит из семи уравнений, в которых содержится семь искомого констант  $A_1, \dots, A_7$ . Очевидно, что эта система уравнений разрешается относительно искомого констант единственным способом. В общем виде указанную систему уравнений можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^7 m_{jk} A_k = P_j, \quad (j, k = 1, 2, \dots, 7). \quad (22)$$

Коэффициенты  $m_{jk}$  и правые части  $P_j$  системы уравнений (22) имеют следующий вид:

$$m_{11} = J_0(\gamma R_1) - (1 - k) J_1(\gamma R_1) / (\gamma R_1); \quad k = c_{12} / c_{11};$$

$$m_{12} = \xi [J_0(\gamma_1 R_1) - (1 - k_1) J_1(\gamma_1 R_1) / (\gamma_1 R_1)];$$

$$\xi = \sqrt{1 + K_{31}^2}; \quad K_{31}^2 = (e_{31}^*)^2 / (\chi_{33}^\sigma c_{11});$$

$$k_1 = c_{12}^D / c_{11}^D;$$

$$m_{13} = \xi [N_0(\gamma_1 R_1) - (1 - k_1) N_1(\gamma_1 R_1) / (\gamma_1 R_1)];$$

$$m_{14} = m_{15} = m_{16} = m_{17} = 0; \quad P_1 = -q U_2 / \Omega;$$

$$q = e_{31}^* R / (c_{11} \alpha); \quad \Omega = \gamma R; \quad m_{21} = J_1(\gamma R_1);$$

$$m_{22} = J_1(\gamma_1 R_1);$$

$$m_{23} = N_1(\gamma_1 R_1); \quad m_{24} = m_{25} = m_{26} = m_{27} = 0;$$

$$P_2 = 0; \quad m_{31} = 0;$$

$$m_{32} = \xi [J_0(\gamma_1 R_2) - (1 - k_1) J_1(\gamma_1 R_2) / (\gamma_1 R_2)];$$

$$m_{33} = \xi [N_0(\gamma_1 R_2) - (1 - k_1) N_1(\gamma_1 R_2) / (\gamma_1 R_2)];$$

$$m_{34} = J_0(\gamma R_2) - (1 - k) J_1(\gamma R_2) / (\gamma R_2);$$

$$\begin{aligned}
 m_{35} &= N_0(\gamma R_2) - (1 - k)N_1(\gamma R_2)/(\gamma R_2); \\
 m_{36} &= m_{37} = 0; P_3 = qU_0/\Omega; m_{41} = 0; \\
 m_{42} &= J_1(\gamma_1 R_2); \\
 m_{43} &= N_1(\gamma_1 R_2); m_{44} = J_1(\gamma R_2); m_{45} = N_1(\gamma R_2); \\
 m_{46} &= m_{47} = 0; P_4 = 0; m_{51} = m_{52} = m_{53} = 0; \\
 m_{54} &= J_0(\gamma R_3) - (1 - k)J_1(\gamma R_3)/(\gamma R_3); \\
 m_{55} &= N_0(\gamma R_3) - (1 - k)N_1(\gamma R_3)/(\gamma R_3); \\
 m_{56} &= \xi[J_0(\gamma_1 R_3) - (1 - k_1)J_1(\gamma_1 R_3)/(\gamma_1 R_3)]; \\
 m_{57} &= \xi[N_0(\gamma_1 R_3) - (1 - k_1)N_1(\gamma_1 R_3)/(\gamma_1 R_3)]; \\
 P_5 &= -qU_0/\Omega; \\
 m_{61} &= m_{62} = m_{63} = 0; m_{64} = J_1(\gamma R_3); \\
 m_{65} &= N_1(\gamma R_2); m_{66} = J_1(\gamma_1 R_3); m_{67} = N_1(\gamma_1 R_3); \\
 P_6 &= 0; \\
 m_{71} &= m_{72} = m_{73} = m_{74} = m_{75} = 0; \\
 m_{76} &= J_0(\gamma_1 R) - (1 - k_1)J_1(\gamma_1 R)/(\gamma_1 R); \\
 m_{77} &= N_0(\gamma_1 R) - (1 - k_1)N_1(\gamma_1 R)/(\gamma_1 R); P_7 = 0.
 \end{aligned}$$

Решения для констант  $A_1$ ,  $A_4$  и  $A_5$ , которые определяют радиальные смещения материальных частиц диска под электродами

первичной и вторичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -\frac{q}{\Omega}(U_2 A_{11} + U_0 A_{12}); A_{11} = \frac{B_{11}}{D_0}; \\
 A_{12} &= \frac{B_{12}}{D_0}; \tag{23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_4 &= \frac{q}{\Omega}(U_2 A_{41} + U_0 A_{42}); A_{41} = \frac{B_{41}}{D_0}; \\
 A_{42} &= \frac{B_{42}}{D_0}; \tag{24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_5 &= -\frac{q}{\Omega}(U_2 A_{51} + U_0 A_{52}); A_{51} = \frac{B_{51}}{D_0}; \\
 A_{52} &= \frac{B_{52}}{D_0}; \tag{25}
 \end{aligned}$$

где  $D_0$  – определитель системы уравнений (22), а  $B_{11}, \dots, B_{52}$  – определители следующих матриц:

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= \begin{vmatrix} -m_{22} & -m_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{32} & m_{33} & -m_{34} & -m_{35} & 0 & 0 \\ m_{42} & m_{43} & -m_{44} & -m_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{54} & m_{55} & -m_{56} & -m_{57} \\ 0 & 0 & m_{64} & m_{65} & -m_{66} & -m_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{76} & m_{77} \end{vmatrix}; \\
 B_{12} &= \begin{vmatrix} -m_{12} & -m_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{22} & -m_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{32} & m_{33} & -m_{34} + m_{54} & -m_{35} + m_{55} & -m_{56} & -m_{57} \\ m_{42} & m_{43} & -m_{44} & -m_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{64} & m_{65} & -m_{66} & -m_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{76} & m_{77} \end{vmatrix}; \\
 B_{41} &= \begin{vmatrix} m_{21} & -m_{22} & -m_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{32} & m_{33} & -m_{35} & 0 & 0 \\ 0 & m_{42} & m_{43} & -m_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{55} & -m_{56} & -m_{57} \\ 0 & 0 & 0 & m_{65} & -m_{66} & -m_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{76} & m_{77} \end{vmatrix}; \\
 B_{42} &= \begin{vmatrix} m_{11} & -m_{12} & -m_{13} & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & -m_{22} & -m_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{32} & m_{33} & -m_{35} + m_{55} & -m_{56} & -m_{57} \\ 0 & m_{42} & m_{43} & -m_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{65} & -m_{66} & -m_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{76} & m_{77} \end{vmatrix};
 \end{aligned}$$

$$B_{51} = \begin{pmatrix} m_{21} & -m_{22} & -m_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{32} & m_{33} & -m_{34} & 0 & 0 \\ 0 & m_{42} & m_{43} & -m_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{54} & -m_{56} & -m_{57} \\ 0 & 0 & 0 & m_{64} & -m_{66} & -m_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{76} & m_{77} \end{pmatrix};$$

$$B_{52} = \begin{pmatrix} m_{11} & -m_{12} & -m_{13} & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & -m_{22} & -m_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{32} & m_{33} & -m_{34} + m_{54} & -m_{56} & -m_{57} \\ 0 & m_{42} & m_{43} & -m_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{64} & -m_{66} & -m_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{76} & m_{77} \end{pmatrix}.$$

Подставляя определение (23) константы  $A_1$  в соотношение (11), а полученный результат – в формулу (5) для расчета потенциала  $U_2$ , приходим к выводу, что

$$U_2 = 2f_e(\omega) \frac{e_{31}^* \alpha q}{\chi_{33}^\sigma R_1 \Omega} (U_2 A_{11} + U_0 A_{12}) J_1(\gamma R_1),$$

откуда следует, что

$$U_2 = U_0 K_2(\Omega, \Pi); \quad (26)$$

$$K_2(\Omega, \Pi) = \frac{2f_e(\omega) K_{31}^2 A_{12} [J_1(\Omega R_1/R) / (\Omega R_1/R)]}{1 - 2f_e(\omega) K_{31}^2 A_{11} [J_1(\Omega R_1/R) / (\Omega R_1/R)]};$$

символом  $\Pi$  обозначен набор геометрических, электрических и физико-механических параметров трансформатора;  $K_{31}^2 = (e_{31}^*)^2 / (c_{11} \chi_{33}^\sigma)$  – квадрат коэффициента электромеханической связи для режима радиальных колебаний материальных частиц поляризованного по толщине пьезокерамического диска.

$$Q_3 = 2\pi \int_{R_2}^{R_3} \rho D_z^{(3)}(\rho) d\rho = C_3^\sigma U_0 \left\{ \frac{2\alpha e_{31}^*}{R_3 \chi_{33}^\sigma (1 - \beta^2)} U_0 [u_\rho^{(3)}(R_3) - u_\rho^{(3)}(R_2)] - 1 \right\}, \quad (28)$$

где  $C_3^\sigma = \pi \chi_{33}^\sigma (R_3^2 - R_2^2) / \alpha$  – статическая электрическая емкость кольцевого электрода;  $\beta = R_2 / R_3$  – геометрический параметр кольца.

$$u_\rho^{(3)}(\rho) = \frac{U_0 \text{Re} e_{31}^*}{\Omega c_{11} \alpha} \{ [K_2(\Omega, \Pi) A_{41} + A_{42}] J_1(\Omega \rho / R) + [K_2(\Omega, \Pi) A_{51} + A_{52}] N_1(\Omega \rho / R) \}. \quad (29)$$

После вычисления значений  $u_\rho^{(3)}(R_2)$  и  $u_\rho^{(3)}(R_3)$  по формуле (29) можно записать, что  $Q_3 = C_3^\sigma U_0 K_3(\Omega, \Pi)$ , где

$$K_3(\Omega, \Pi) = \frac{2K_{31}^2}{1 - \beta^2} \{ [K_2(\Omega, \Pi) A_{41} + A_{42}] J(\Omega) + [K_2(\Omega, \Pi) A_{51} + A_{52}] N(\Omega) \} - 1;$$

Определим амплитудное значение  $U_0$  разности электрических потенциалов на электроде первичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора.

Очевидно, что

$$U_0 = \frac{U_1 Z_3}{Z_r + Z_3}, \quad (27)$$

где  $Z_3$  – электрический импеданс области № 3 под кольцевым электродом первичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора. В соответствии с законом Ома для участка электрической цепи  $Z_3 = U_0 / I_3$ , где  $I_3$  – амплитуда переменного электрического тока в проводнике, который соединяет генератор разности электрических потенциалов с кольцевым электродом. Как и ранее, будем полагать, что  $I_3 = -i\omega Q_3$ , где  $Q_3$  – амплитудное значение поляризационного заряда под кольцевым электродом, которое определяется следующим образом:

Подставляя выражения (24) и (25) для расчета констант  $A_4$  и  $A_5$  в определение (13) и учитывая при этом выражение (26), получаем следующую формулу для расчета смещений  $u_\rho^{(3)}(\rho)$ :

$$J(\Omega) = [J_1(\Omega R_3/R) - \beta J_1(\beta \Omega R_3/R)]/(\Omega R_3/R); \quad N(\Omega) = [N_1(\Omega R_3/R) - \beta N_1(\beta \Omega R_3/R)]/(\Omega R_3/R).$$

После определения заряда  $Q_3$  электрический импеданс  $Z_3$  определяется выражением  $Z_3 = -1/[i\omega C_3^e K_3(\Omega, \Pi)]$ , откуда следует определение разности потенциалов на кольцевом электроде

$$U_0 = \frac{U_1}{1 - i\omega C_0^\sigma Z_r K_3(\Omega, \Pi)}. \quad (30)$$

Подставляя выражение (30) в соотношение (26), приходим к выводу, что

$$U_2 = U_1 \frac{K_2(\Omega, \Pi)}{1 - i\omega C_0^\sigma Z_r K_3(\Omega, \Pi)},$$

откуда следует формула для расчета коэффициента трансформации

$$K(\omega, \Pi) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{K_2(\Omega, \Pi)}{1 - i\omega C_0^\sigma Z_r K_3(\Omega, \Pi)}. \quad (31)$$

Аналитическая конструкция (31) является математической моделью пьезоэлектрического трансформатора с кольцевым электродом в первичной электрической цепи.

**2. Теоретическое исследование математической модели пьезоэлектрического трансформатора с кольцевым электродом в первичной электрической цепи.** Выражение (31), определяющее коэффициент передачи пьезоэлектронного устройства с электрического входа на электрический выход, имеет конструкцию, которая типична для электронных устройств с отрицательной обратной связью. Отчетливо видно, что глубина обратной связи прямо пропорциональна значению выходного сопротивления источника сигнала, т. е. импедансу  $Z_r$ . При значении  $Z_r = 0$  обратная связь исчезает, и коэффициент трансформации полностью определяется частотно зависимой функцией  $K_2(\Omega, \Pi)$ .

Физическое содержание обратной связи, которая существует в пьезоэлектрических трансформаторах, практически очевидно. На частоте электромеханического резонанса радиальных колебаний существенно возрастают уровни смещений материальных частиц пьезоэлектрического диска. Это сопровождается увеличением деформаций и, как следствие, уровней поляризационных зарядов на электродах первичной электрической цепи. Из-за этого увеличивается амплитуда электрического тока в первичной электрической цепи, что сопровождается увеличением падения напряжения на сопротивлении  $Z_r$  и, соответствен-

но, уменьшением разности потенциалов  $U_0$  (см. рис. 1).

С целью определения влияния выходного импеданса источника электрического сигнала на коэффициент трансформации пьезоэлектрического трансформатора была выполнена серия расчетов, результаты которых показаны на рис. 3–6.

Все расчеты были выполнены для свободного пьезокерамического диска радиусом  $R = 25 \cdot 10^{-3}$  м и толщиной  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-3}$  м. Материал диска – поляризованная по толщине пьезокерамика типа ЦТС со следующими параметрами:  $\rho_0 = 7400$  кг/м<sup>3</sup>;  $c_{11}^E = 112$  ГПа;  $c_{12}^E = 62$  ГПа;  $c_{33}^E = 100$  ГПа;  $e_{33} = 20$  Кл/м<sup>2</sup>;  $e_{31} = -9$  Кл/м<sup>2</sup>;  $\chi_{33}^e = 1800\chi_0$ ;  $\chi_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – диэлектрическая постоянная. В расчетах, результаты которых показаны на рис. 3–5, добротность пьезокерамики  $Q_m = 100$ . При построении кривых, показанных на рис. 3 и 4, было принято значение электрической нагрузки  $Z_n = 1000$  Ом. Значение модуля электрического импеданса источника электрического сигнала показано в поле рисунков. По осям ординат на рис. 3–6 отложены числовые значения модуля коэффициента трансформации. По осям абсцисс – безразмерная величина  $\Omega = \omega\tau_0$ , где  $\tau_0 = R/\sqrt{c_{11}^E/\rho_0}$  – постоянная времени рассматриваемого пьезокерамического диска. Значению  $\Omega = 1$  соответствует частота  $f = 20072$  Гц. Как следует из результатов, представленных на рис. 3 и 4, изменение параметра  $Z_r$  сопровождается существенными изменениями частотной характеристики пьезокерамического дискового трансформатора. Те же тенденции наблюдаются и на рис. 5. На рис. 6 показано влияние механической добротности  $Q_m$  материала диска на изменение коэффициента трансформации в узкой полосе частот в окрестности частоты первого электромеханического резонанса радиальных колебаний свободного (не закрепленного по контуру  $\rho = R$ ) пьезокерамического диска. Числовые значения добротностей указаны в поле рисунков цифрами возле соответствующих кривых. Отчетливо видно, что увеличение выходного сопротивления источника электрического сигнала сопровождается

существенным уменьшением влияния механической добротности материала диска на

коэффициент трансформации.

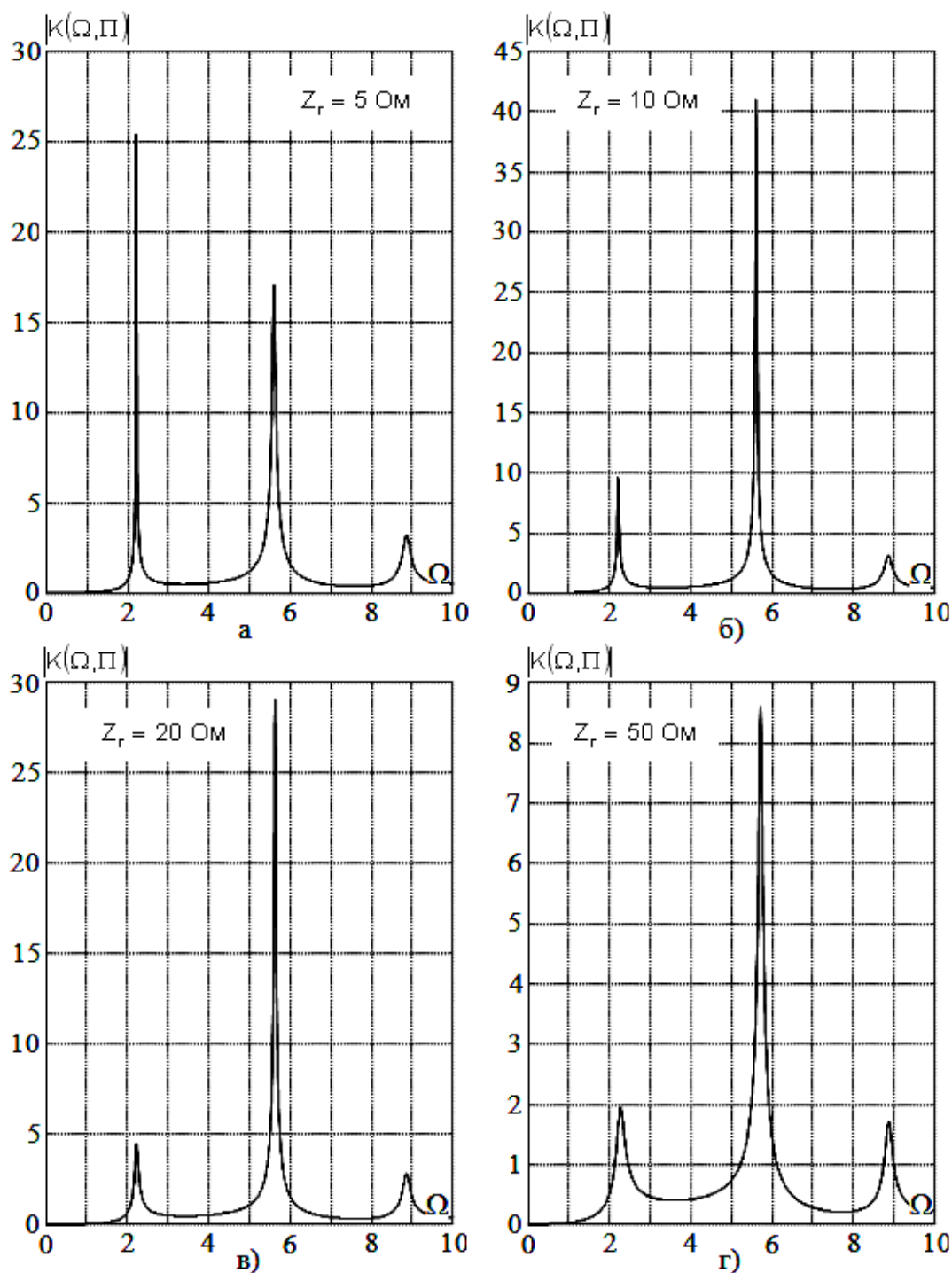


Рис. 3. Влияние выходного сопротивления источника сигнала на частотно зависимое изменение модуля коэффициента трансформации при относительных размерах электродов  $R_1/R = 0,2$ ,  $R_2/R = 0,25$  и  $R_3/R = 0,999$

Из результатов расчетов, которые показаны на рис. 3–6, можно сделать вывод, что каждому набору физико-механических пара-

метров пьезоэлектрика, каждой конфигурации электродов первичной и вторичной электрической цепи и фиксированной электрической



нагрузке пьезоэлектрического трансформатора соответствует свое фиксированное значение выходного сопротивления  $Z_r$  источника

электрического сигнала, при котором реализуется максимальный коэффициент трансформации в заданном диапазоне частот.

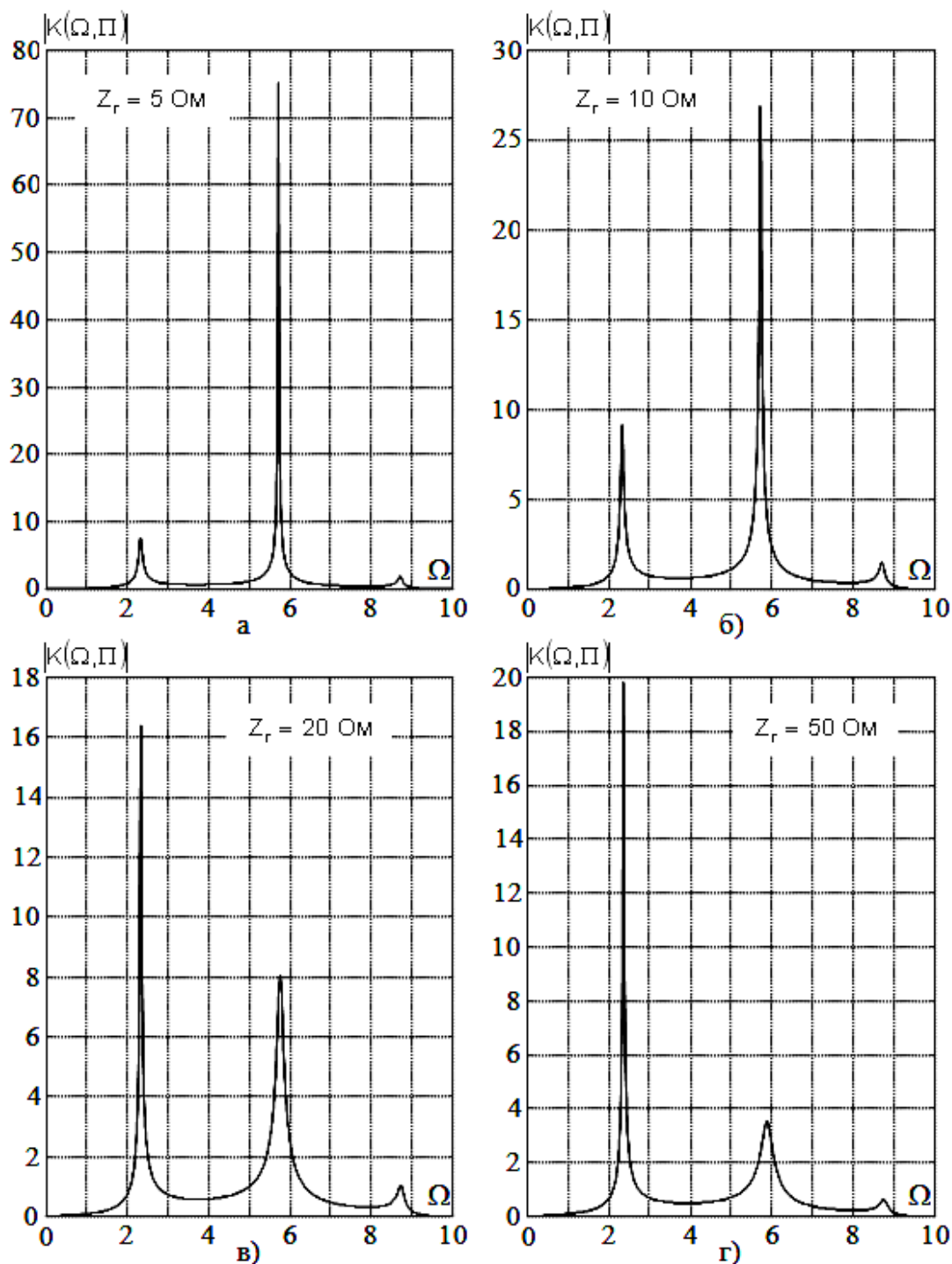


Рис. 4. Влияние выходного сопротивления источника сигнала на частотно зависимое изменение модуля коэффициента трансформации при относительных размерах электродов  $R_1/R = 0,4$ ,  $R_2/R = 0,45$  и  $R_3/R = 0,999$

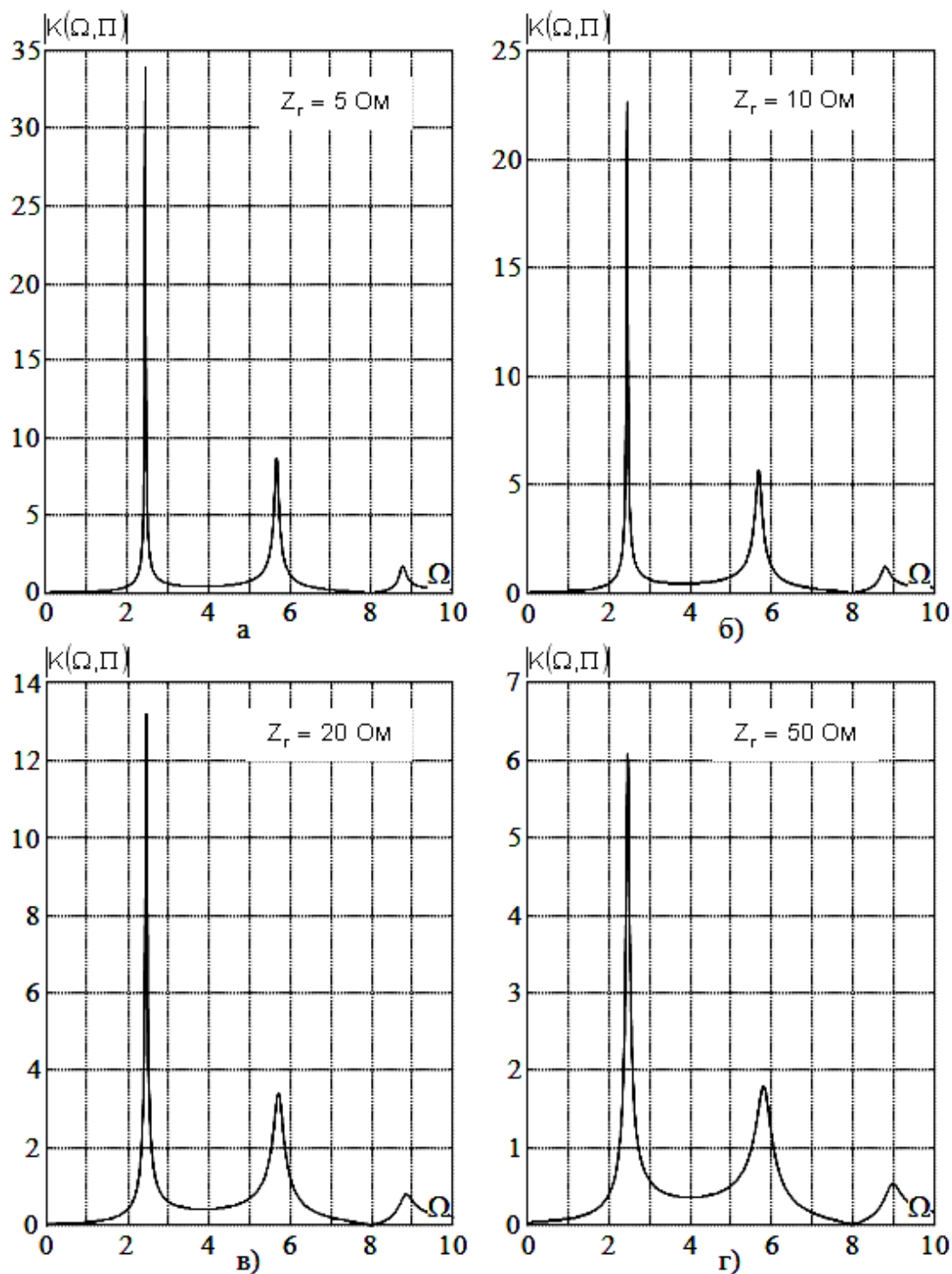


Рис. 5. Влияние выходного сопротивления источника сигнала на частотно зависимое изменение модуля коэффициента трансформации при относительных размерах электродов  $R_1/R = 12/25$ ,  $R_2/R = 15/25$ ,  $R_3/R = 0,999$  и электрической нагрузке  $Z_H = 10 \text{ кОм}$

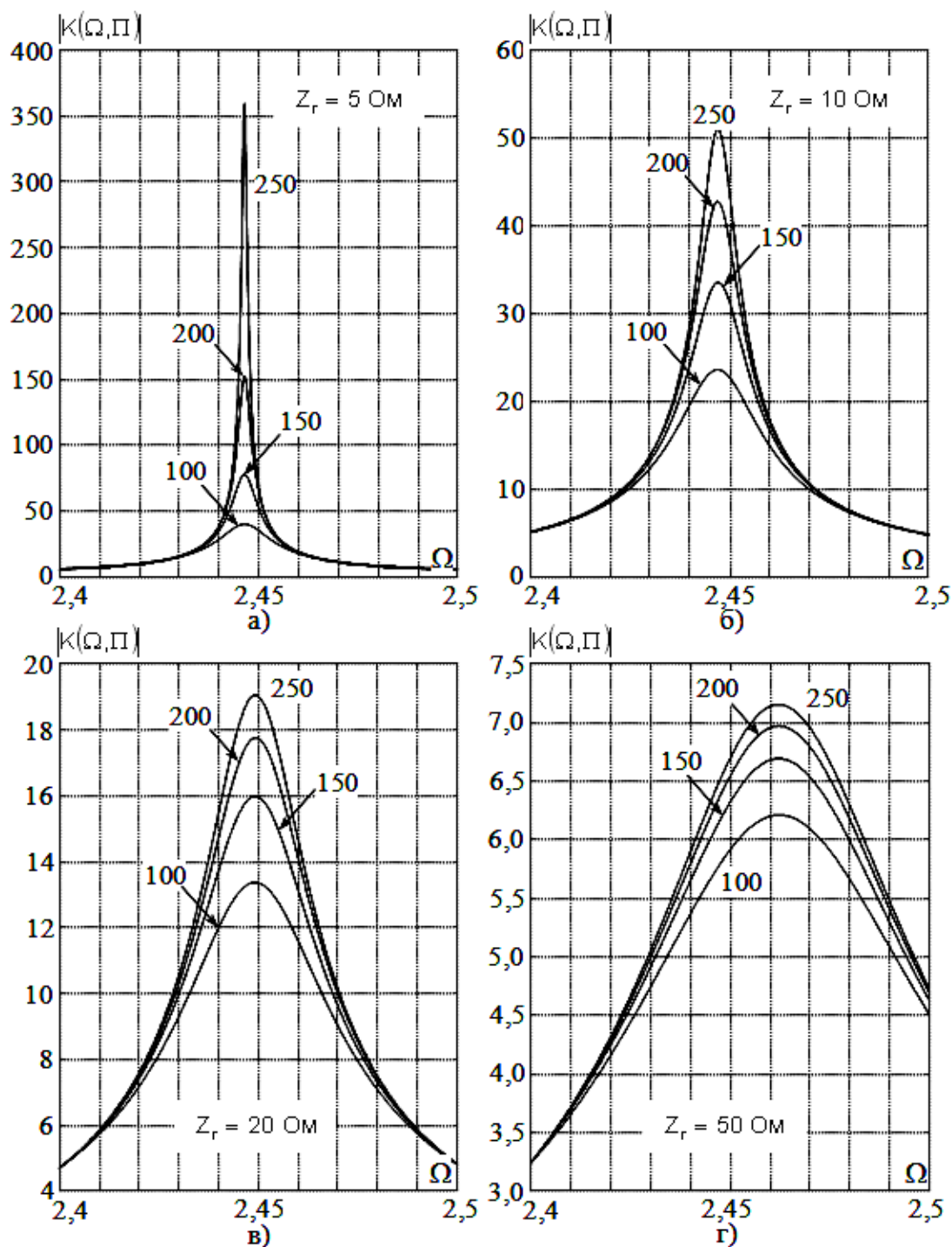


Рис. 6. Влияние выходного сопротивления источника сигнала на частотно зависимое изменение модуля коэффициента трансформации при относительных размерах электродов  $R_1/R = 12/25$ ,  $R_2/R = 15/25$ ,  $R_3/R = 0,999$  и электрической нагрузке  $Z_n = 10$  кОм

**Выводы.** Основные результаты настоящей работы можно сформулировать следующим образом:

– построена математическая модель пьезоэлектрического трансформатора с коль-

цевым электродом в первичной электрической цепи;

– показана высокая чувствительность частотной характеристики пьезоэлектрического трансформатора к изменениям значений

выходного сопротивления источника электрического сигнала в первичной электрической цепи;

– проведено компьютерное моделирование характеристик пьезоэлектрического трансформатора с кольцевым электродом в первичной электрической цепи при различных значениях выходного сопротивления источника электрического сигнала.

### Список литературы

1. Джагунов Р. Г. Пьезоэлектронные устройства вычислительной техники, систем контроля и управления / Р. Г. Джагунов, А. А. Ерофеев. – С.Пб.: Политехника, 1994. – 608 с.
2. Исследование характеристик пьезоэлектрического трансформатора на основе радиальных колебаний в тонких пьезокерамических дисках / А. В. Богдан, О. Н. Петрищев, Ю. И. Якименко, Ю. Ю. Яновская // Электроника и связь. Темат. вып. «Электроника и нанотехнологии». – 2009. – Ч. 1. – С. 269–274.
3. Математическое моделирование колебаний тонких пьезокерамических дисков для создания функциональных элементов пьезоэлектроники / А. В. Богдан, О. Н. Петрищев, Ю. И. Якименко, Ю. Ю. Яновская // Электроника и связь. Темат. вып. «Электроника и нанотехнологии». – 2009. – Ч. 2. – С. 35–42.
4. Лавриненко В. В. Пьезоэлектрические трансформаторы / В. В. Лавриненко. – М.: Энергия, 1975. – 112 с.
5. Yu-Hsiang Hsu. Electrical and mechanical fully coupled theory and experimental verification of Rosen-type piezoelectric transformers / Yu-Hsiang Hsu, Chih-Kung Lee, Wen-Hsin Hsiao // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. – 2005. – Vol. 52, No. 10.
6. Flynn A. M. Fundamental limits on energy transfer and circuit considerations for piezoelectric transformers / Anita M. Flynn, Seth R. Sanders // IEEE Transactions on Power Electronics. – 2002. – Vol. 17, No. 1.
7. Заболотный А. М. Исследование характеристик пьезоэлектрического трансформатора, совместимого с микросистемными технологиями [Электронный ресурс] / А. М. Заболотный. – Режим доступа: <http://www.sworld.com.ua/konfer26/194.pdf>
8. Сенник Н. А. Моделирование и расчет электроупругих полей пьезокерамических оболочек и пластин [Электронный ресурс] / Н. А. Сенник. – Режим доступа: <http://www.dissercat.com/content/modelirovaniye-i-raschet-elektrouprugikh-polei-pezoeramicheskikh-obolochek-i-plastin>
9. Паэранд Ю. Э. Влияние места закрепления пьезотрансформатора на эффективность его работы / Ю. Э. Паэранд, П. В. Охрименко, К. Ю. Филоненко // Современные информационные и электронные технологии: междунар. науч.-практ. конф. – 2014. – С. 69–70.
10. Новые области применения пьезотрансформаторов / В. М. Климашин, В. Г. Никифоров, А. Я. Сафронов, В. К. Казаков // Компоненты и технологии. – 2004. – № 1. – С. 56–60.
11. Day M. Understanding piezoelectric transformers in CCFL backlight applications / Michael Day, Bang S. Lee // Analog Applications Journal. – 2002.
12. Wells E. Comparing magnetic and piezoelectric transformer approaches in CCFL applications / Eddy Wells // Analog Applications Journal. – 2002.
13. Експериментальні частотні характеристики п'єзотрансформатора поперечно-поперечного типу для стабілізації струму люмінесцентної лампи / Шкодзінський О., Беякова І., Пісьціо В., Медвідь В. // Вісник ТНТУ. – 2011. – Т. 16, № 3. – С. 142–148.
14. Тихонов А. Н. Математическая модель / А. Н. Тихонов // Математическая энциклопедия. – М.: Советская энциклопедия, 1982. – Т. 3, Коо – Од. – С. 574–575.
15. Петрищев О. Н. Принципы и методы расчета передаточных характеристик дисковых пьезоэлектрических трансформаторов. Ч. 1. Принципы математического моделирования трансформаторов, работающих на планарных осесимметричных колебаниях пьезокерамических дисков / О. Н. Петрищев, К. В. Базило // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2015. – № 3. – С. 10–20.
16. Петрищев О. Н. Принципы и методы расчета передаточных характеристик дисковых пьезоэлектрических трансформаторов. Ч. 2. Методика расчета параметров и характеристик простейшего дискового пьезоэлектрического трансформатора / О. Н. Петрищев, К. В. Базило // Вісник

Черкаського державного технологічного університету. – 2015. – № 4. – С. 10–23.

17. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / [под ред. М. Абрамовица и И. Стиган]. – М. : Наука, 1979. – 832 с.

### References

1. Dzhagupov, R. G. and Yerofeev, A. A. (1994) Piezoelectronic devices of computing, control and monitoring systems. St. Petersburg: Politehnika, 608 p. [in Russian].
2. Bogdan, A. V., Petrishchev, O. N., Yakimenko, Yu. I. and Yanovskaya, Yu. Yu. (2009) Investigation of characteristics of piezoelectric transformer on the basis of radial oscillations in thin piezoceramic disks. *Elektronika i svyaz. Temat. vyp. "Elektronika i nanotekhnologiyi"*, P. 1, pp. 269–274 [in Russian].
3. Bogdan, A. V., Petrishchev, O. N., Yakimenko, Yu. I. and Yanovskaya, Yu. Yu. (2009). Mathematical modeling of vibrations of thin piezoceramic disks to create functional piezoelectronics elements. *Elektronika i svyaz. Temat. vyp. "Elektronika i nanotekhnologiyi"*, P. 2, pp. 35–42 [in Russian].
4. Lavrinenko, V. V. (1975) Piezoelectric transformers. Moscow: Energiya, 112 p. [in Russian].
5. Yu-Hsiang Hsu, Chih-Kung Lee, Wen-Hsin Hsiao (2005) Electrical and mechanical fully coupled theory and experimental verification of Rosen-type piezoelectric transformers. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, Vol. 52, No. 10.
6. Anita M. Flynn, Seth R. Sanders (2002) Fundamental limits on energy transfer and circuit considerations for piezoelectric transformers. *IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol. 17, No. 1.
7. Zabolotnii, A. M. The investigation of characteristics of piezoelectric transformer, which is compatible with microsystem technologies, available at: <http://www.sworld.com.ua/konfer26/194.pdf>
8. Senik, N. A. Simulation and calculation of electroelastic fields of piezoceramic shells and plates, available at: <http://www.dissercat.com/content/modelirovaniye-i-raschet-elektroprugikh-polei-pezoeramicheskikh-obolochek-i-plastin>
9. Paerand, Yu. E, Okhrimenko, P. V. and Filonenko, K. Yu. (2014) The influence of piezoelectric transformer's fixing place on its efficiency. *Sovremennyye informatsionnyye i elektronnyye tehnologiyi: mezhdunar. nauch.-prakt. konf.*, pp. 69–70 [in Russian].
10. Klimashin, V. M., Nikiforov, V. G., Safonov, A. Ya. and Kazakov, V. K. (2004) New applications of piezoelectric transformers. *Komponenty i tehnologiyi*, No. 1, pp. 56–60 [in Russian].
11. Day, Michael and Lee, Bang S. (2002) Understanding piezoelectric transformers in CCFL backlight applications. *Analog Applications Journal*.
12. Wells, Eddy (2002) Comparing magnetic and piezoelectric transformer approaches in CCFL applications. *Analog Applications Journal*.
13. Shkodzinskii, O., Beliakova, I., Pistsio, V. and Medvid, V. (2011) Experimental frequency characteristics of transverse-transverse type piezoelectric transformer for stabilizing fluorescent lamp current. *Visnyk TNTU*, Vol. 16, No. 3, pp. 142–148 [in Ukrainian].
14. Tikhonov, A. N. (1982) Mathematical model. In: *Mathematical encyclopedia*. Moscow: Sovetskaya entsiklopedia, Vol. 3, pp. 574–575 [in Russian].
15. Petrishchev, O. N. and Bazilo, C. V. (2015) Principles and methods for calculation of transfer characteristics of disk piezoelectric transformers. Part 1. Principles of mathematical modeling of transformers that operate on planar axisymmetric vibrations of piezoceramic disks. *Visnyk Cherkaskogo derzhavnogo tehnologichnogo universitetu. Seria: Tehnichni nauky*, No. 3, pp. 10–20 [in Russian].
16. Petrishchev, O. N. and Bazilo, C. V. (2015) Principles and methods for calculation of transfer characteristics of disk piezoelectric transformers. Part 2. The procedure of calculation of parameters and characteristics of the simplest disk piezoelectric transformer. *Visnyk Cherkaskogo derzhavnogo tehnologichnogo universitetu. Seria: Tehnichni nauky*, No. 4, pp. 10–23 [in Russian].
17. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables (1979) In: Milton Abramowitz and Irene A. Stegun (eds.). Moscow: Science, 832 p. [in Russian].

**O. N. Petrishchev**<sup>1</sup>, *Dr. Tech.Sc., professor,*

**K. V. Bazilo**<sup>2</sup>, *Ph.D. (Eng.), associate professor*

<sup>1</sup>National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute"

Peremogy ave., 37, Kyiv, 03056, Ukraine

<sup>2</sup>Cherkasy State Technological University

Shevchenko blvd, 460, Cherkasy, 18006, Ukraine

## MATHEMATICAL MODEL OF DISK PIEZOELECTRIC TRANSFORMER WITH RING ELECTRODE IN PRIMARY ELECTRICAL CIRCUIT

*Power electronic electromagnetic transformers have been the dominating component for converting and transforming of electrical power. The trend of power converters goes in the direction of higher efficiency and smaller volume. Research has shown that piezoelectric transformers (PT) can compete with traditional electromagnetic transformers on both efficiency and power density. PTs are therefore an interesting field of research. PTs are advantageous in DC-DC converter applications and in cold cathode fluorescent lamps (CCFL) drivers. The favorable attributes of the PT are low weight and size and potentially low cost. One additional important characteristic is the high voltage isolation of ceramic materials used to build PTs. The advantages of using piezoelectric transformers to light LCD monitor backlights include its thin thickness, a small temperature rise, and a low electromagnetic interference (EMI) noise. In addition, a piezoelectric transformer is more suitable for mass production than traditional, coil-based transformers.*

*With the help of a personal computer it is possible in a few hours to model many combinations of geometric, physical and mechanical parameters of specific design of piezoelectric transformer, and to find a combination thereof, which provides an implementation of the devices specified parameters. This allows to sharply reduce the number of natural experiments, which inevitably are carried out in the process of the development of new devices. In addition, using a mathematical model it is easy to determine the characteristics sensitivity of piezoelectric transformer to variations of elements parameters of its design. With access to these dependences, we can implement a rational choice of products manufacturing technology, i.e. choose the least expensive technology from a number of ones. Thus, high-quality mathematical model can significantly reduce the time and cost of developing of piezoelectric transformers new models.*

*In most papers the described methods for constructing of piezoelectric transformers models are mostly based on the use of equivalent electrical circuits and it does not allow to analyze stress-strain state of solids with piezoelectric effects.*

*Based on the above, it can be argued that currently there are no reliable and valid methods for constructing of mathematical models of piezoelectric transformers, which could be used as a theoretical basis for characteristics and parameters calculating of this class of functional elements of modern piezoelectronics.*

*We can formulate the main results of this work as follows:*

*– mathematical model of piezoelectric transformer with ring electrode in primary electrical circuit is constructed;*

*– high sensitivity of frequency characteristic of piezoelectric transformer to the values of output impedance of electrical signal source in primary electrical circuit is demonstrated.*

**Keywords:** *piezoelectric transformer, axially symmetric oscillations, physical processes, mathematical model.*

*Статтю представляє д.т.н., професор О. М. Петрищев, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут».*